Inéquations logarithmiques et exponentielles

Si $a > 1$

$\log_a x$ et a^x sont des fonctions strictement croissantes, elles conservent donc l'ordre :

par exemple: (1) $x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$

(2) $x_1 < x_2 \iff \log_a(x_1) < \log_a(x_2)$ *(on garde le même symbole d'inégalité)*

Si $0 < a < 1$

$\log_a x$ et a^x sont des fonctions strictement décroissantes, l'ordre est donc inversé:

par exemple: (1) $x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$

(2) $x_1 < x_2 \iff \log_a(x_1) > \log_a(x_2)$ *(on inverse le symbole d'inégalité)*

La résolution d'une inéquation simple revient donc à réécrire celle-ci sous une forme $a^x < a^y$, $a^x \le a^y$, $a^x > a^y$, $a^x \ge a^y$ et de même pour les logarithmes: $\log_a x < \log_a y$, ...

Pour ce faire, il est souvent utile d'utiliser les propriétés des fonctions logarithmiques et exponentielles.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4^{2x-1} - \sqrt{8} > 0$

On réécrit l'équation sous la forme $a^x = a^y$, en utilisant comme base $a = 2$

$$2^{2(2x-1)} > 2^{\frac{3}{2}}$$

2^xétant strictement croissante, en utilisant (1) on a alors

$$2(2x-1) > \frac{3}{2}$$

et donc

$$4x - 2 > \frac{3}{2} \iff x > \frac{7}{8}$$

$$S = \left]\frac{7}{8}, \longrightarrow\right.$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log_3(x+2) + \log_9(x) > 1$

L'argument d'une fonction logarithme devant être strictement positif, nous avons comme CE:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 & (1) \\ x > 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ou encore simplement} \quad x > 0$$

On transforme le 1er membre en un logarithme en base 3

$$\log_3(x+2) + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} > 1$$

$$\log_3(x+2) + \frac{\log_3 x}{2} > 1$$

après mise au même dénominateur,

$$2\log_3(x+2) + \log_3 x > 2$$

$$\log_3(x+2)^2 + \log_3 x > 2$$

$$\log_3\left(x(x+2)^2\right) > 2$$

On réécrit l'équation sous la forme $\log_a x > \log_a y$, la base étant ici égale à 3.
2 peut s'écrire $\log_3 3^2 = \log_3 9$

$$\log_3\left(x(x+2)^2\right) > \log_3 9$$

en utilisant (2), on a alors

$$x(x+2)^2 > 9$$
$$x\left(x^2 + 4x + 4\right) - 9 > 0$$
$$x^3 + 4x^2 + 4x - 9 > 0$$

on voit facilement que $x = 1$ annule le 1er membre

après factorisation à l'aide de la méthode de Hörner, on obtient

$$(x-1)\left(x^2 + 5x + 9\right) > 0$$

$x^2 + 5x + 9$ a un discriminant $\Delta = -11 < 0$. Donc $x^2 + 5x + 9$ est toujours strictement positif

x		1	
$(x-1)\left(x^2+5x+9\right)$	$-$	0	$+$

$S =]1, \longrightarrow$

Les C.E. sont bien vérifiées par cette solution.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log_{0.6}(x+1) \geq 2$

L'argument d'une fonction logarithme devant être strictement positif, nous avons comme CE:
$x + 1 > 0$ ou encore $x > -1$

On réécrit l'équation sous la forme $\log_a x \geq \log_a y$, la base étant ici égale à 0,6

$$\log_{0.6}(x+1) \geq \log_{0.6} 0.6^2$$

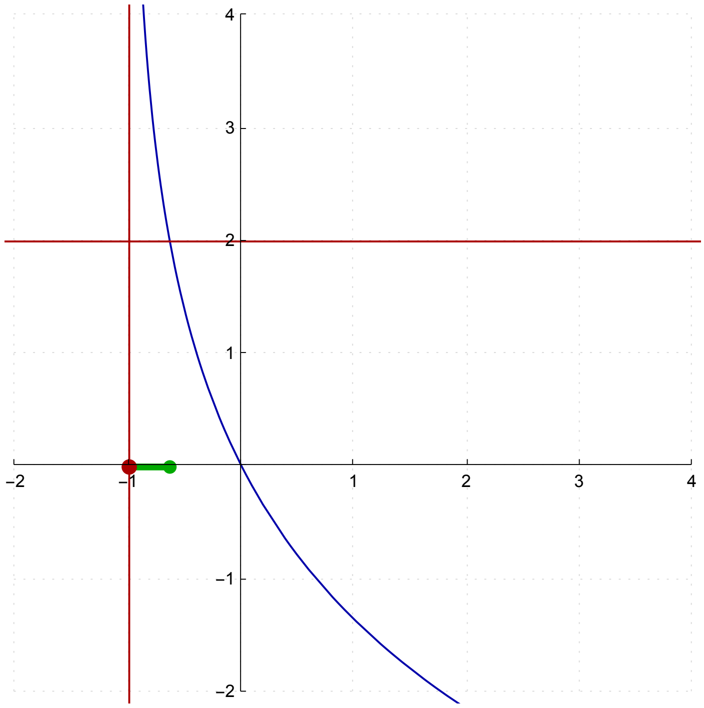
Attention, $\log_{0.6} x$ est une fonction strictement décroissante! En utilisant (4), on a alors

$$x + 1 \leq 0.36$$
et donc
$$x \leq -0.64$$

En tenant compte de la C.E., on obtient finalement

$$-1 < x \leq -0.64$$
et
$$S =]-1, -0.64]$$

Ci-dessous, la fonction $\log_{0.6}(x+1)$ dessinée en bleu.



Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{e^x+1}{e^x-1} \geq 0$

On pose $y = e^x$. l'inéquation devient alors

$$\frac{y+1}{y-1} \geq 0$$

y		-1		1	
$\frac{y+1}{y-1}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

On obtient

$y \leq -1$ ou $y > 1$

c'est-à-dire

$e^x \leq -1$ ou $e^x > 1$

Etant donné que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (image de $e^x =]0, \longrightarrow)$

$e^x \leq -1$ est impossible

Nous avons donc

$e^x > 1$

$e^x > e^0$

$x > 0$

$S =]0, \longrightarrow$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x + \frac{2}{1-\ln x} \geq 0$

On pose $y = \ln x$. L'inéquation devient alors

$$y + \frac{2}{1-y} \geq 0$$

$$\frac{y-y^2+2}{1-y} \geq 0$$

$$\frac{y^2-y-2}{y-1} \geq 0$$

y		-1		1		2	
$\frac{y^2-y-2}{y-1}$	$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$

On obtient

$$-1 \leq y < 1 \text{ ou } y \geq 2$$

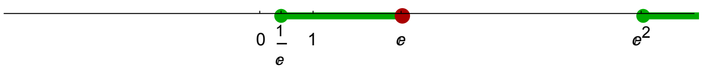
c'est-à-dire

$$-1 \leq \ln x < 1 \text{ ou } y \quad \geq 2$$

$$\ln e^{-1} \leq \ln x < \ln e \quad \text{ou} \quad \ln x \geq \ln e^2$$

$$\frac{1}{e} \leq x < e \quad \text{ou} \quad x \geq e^2$$

$$S = [\frac{1}{e}, e[\cup [e^2, \longrightarrow$$



- Résoudre l'inéquation $1 - 3\,e^x + 2\,e^{2\,x} > 0$ dans $\mathbb{R}$

On pose $y = e^x$. l'inéquation devient alors

$2\,y^2 - 3\,y + 1 > 0$

Pour résoudre cette inéquation, il faut faire un tableau de signe

x		$\frac{1}{2}$		1	
$2\,y^2 - 3\,y + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Il faut donc que $y < \frac{1}{2} \bigvee y > 1$ (1)

c'est–à–dire que

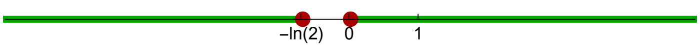
$$e^x < \frac{1}{2} \bigvee e^x > 1$$

ce qui donne pour x

$$x < -\ln(2) \bigvee x > 0$$

Et la solution est donc:

$$S = \longleftarrow, -\ln(2)[\cup]0, \longrightarrow$$



———————————————————————————————

(1) le symbole $\vee$ signifie 'ou' en logique mathématique