Equations logarithmiques et exponentielles

$\log_a x$ et a^x sont des fonctions injectives:

$$x = y \iff a^x = a^y \tag{1}$$

$$x = y \iff \log_a x = \log_a y \qquad \text{avec } x,\, y > 0 \tag{2}$$

La résolution d'une équation simple revient donc à réécrire celle-ci sous la forme $a^x = a^y$ ou $\log_a x = \log_a y$.
Pour ce faire, il est souvent utile d'utiliser les propriétés des fonctions logarithmes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^{1-x} - \frac{1}{9} = 0$

On réécrit l'équation sous la forme $a^x = a^y$, la base étant ici égale à 3

$$3^{1-x} = 3^{-2}$$

en utilisant (1), on a alors

$$1 - x = -2$$

et donc

$$x = 3$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_2 x + 1 = 0$

On réécrit l'équation sous la forme $\log_a x = \log_a y$, la base étant ici égale à 2

$$\log_2 x = -1$$

sachant que $\log_a a^x = x$,

$$\log_2 x = \log_2 2^{-1}$$

en utilisant (1), on a alors

$$x = \frac{1}{2}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_3 x - 2 \log_3(x - 2) = 1$

Réécrivons l'équation sous la forme suivante

$$\log_3 x = 2 \log_3(x - 2) + 1$$

Transformons chaque terme en un logarithme, sachant que $\log_3 3 = 1$

$$\log_3 x = 2 \log_3(x - 2) + \log_3 3$$

En utilisant la proporiété $\log_a x^n = n \log_a x$, on obtient

$$\log_3 x = \log_3(x - 2)^2 + \log_3 3$$

Ramenons-nous à la forme $\log_a x = \log_a y$ en utilisant la propriété $\log_a x + \log_a y = \log_a(x.y)$

$$\log_3 x = \log_3\left(3\,(x - 2)^2\right)$$

en utilisant (1), on a alors

$$x = 3\,(x-2)^2$$
$$x = 3\left(x^2 - 4\,x + 4\right)$$
$$3\,x^2 - 13\,x + 12 = 0$$

et

$$x = 3 \;\text{ ou } x = \frac{4}{3}$$

Les conditions d'existence sont $\begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$ donc il faut que $x > 2$

La solution finale est donc $x = 3$

Dans le cas d'une équation plus compliquée, on peut parfois se ramener à une équation algébrique en posant $y = a^x$ ou $y = \log_a x$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{2\,x+2} = 17 \times 2^x - 4$

On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

$$4\,.\,2^{2\,x} - 17\,.\,2^x + 4 = 0$$

on pose alors $y = 2^x$et l'équation devient

$$4\,y^2 - 17\,y + 4 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$y = 4 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire

$$2^x = 4 \;\text{ ou }\; 2^x = \frac{1}{4}$$

$$2^x = 2^2 \;\text{ ou }\; 2^x = 2^{-2}$$

et

$$x = 2 \;\text{ ou }\; x = -2$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln^2 x - \ln x = 6$

On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

$$\ln^2 x - \ln x - 6 = 0$$

on pose alors $y = \ln x$ et l'équation devient

$$y^2 - y - 6 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$y = -2 \;\text{ ou }\; y = 3$$

c'est-à-dire

$$\ln x = -2 \quad \text{ou} \quad \ln x = 3$$

sachant que $\ln x = y \iff x = e^y$, on a

$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{ou} \quad x = e^3$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

$$e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$$

on pose alors $y = e^x$ et l'équation devient

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -4$$

c'est-à-dire

$$e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = -4$$

la 1ère égalité donne $x = 0$ et la seconde est clairement impossible, l'image de la fonction e^x étant $\mathbb{R}_0^+$, elle ne peut prendre des valeurs négative.

nous avons donc une seule solution

$$x = 0$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x+1) - \log x = \log(x-2)$

L'argument d'une fonction logarithme devant être strictement positif, nous avons comme CE:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 & (1) \\ x > 0 & (2) \\ x - 2 > 0 & (3) \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x > -1 & (1) \\ x > 0 & (2) \\ x > 2 & (3) \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'il faut que $x > 2$.

On réécrit l'équation sous la forme suivante

$$\log(x+1) = \log x + \log(x-2)$$

Ramenons-nous à la forme $\log_a x = \log_a y$ en utilisant la propriété $\log_a x + \log_a y = \log_a(x.y)$

$$\log(x+1) = \log\left(x^2 - 2x\right)$$

en utilisant l'injectivité, on a alors

$$x + 1 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \simeq -0.302776 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3.30278$$

Vu la C.E. $x > 2$, la seule solution de l'équation est

$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3.30278$$